

คณิตศาสตร์ประยุกต์ 1 (มี.ค. 68)

วันอาทิตย์ที่ 9 มีนาคม 2568 เวลา 8.30 - 10.00 น.

ตอนที่ 1 แบบปรนัย 5 ตัวเลือก เลือก 1 คำตอบที่ถูกต้องที่สุด จำนวน 25 ข้อ (ข้อที่ 1 – 25) ข้อละ 3 คะแนน รวม 75 คะแนน

1. สำหรับเซต S ใดๆ ให้ $P(S)$ แทนเพาเวอร์เซตของ S

ให้เซต $A = \{\emptyset, \sqrt{2}\}$ แล้วเซต $P(P(A)) \cup P(A)$ มีสมาชิกกี่ตัว

1. 10 2. 16 3. 18 4. 19 5. 20

2. ให้ p, q และ r เป็นประพจน์ แล้วประพจน์ใดต่อไปนี้มีความจริงเป็นจริงในบางกรณี และเป็นเท็จในบางกรณี

1. $(p \vee \sim p) \rightarrow (r \wedge \sim r)$ 2. $(\sim p \wedge q) \wedge (p \wedge r)$ 3. $(q \rightarrow r) \leftrightarrow (q \wedge \sim r)$
4. $(p \vee r) \wedge (q \vee \sim r)$ 5. $(p \wedge q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$

3. กำหนดให้ $p(x)$ และ $q(x)$ เป็นพหุนามดีกรี 3 ที่ทำให้ $p(-1) = 1$ และ $q(-1) = -1$
แล้วพหุนามในข้อใดต่อไปนี้หารด้วย $x + 1$ ลงตัว

1. $xp(x) + q(x)$ 2. $p(x) + xq(x)$ 3. $p(x)q(x) + x$
4. $p(x)q(x) + x^2$ 5. $p(x) + q(x) + x$

4. สำนักข่าวออนไลน์แห่งหนึ่งมีบริการสำหรับสมาชิกรายเดือน โดยปัจจุบันค่าบริการรายเดือนอยู่ที่ 70 บาทต่อคน และมีสมาชิกอยู่ 18,000 คน นอกจากนี้จากการสำรวจกลุ่มผู้ใช้บริการ พบว่าการปรับราคาค่าบริการจะมีผลต่อจำนวนสมาชิกในรูปแบบฟังก์ชันเชิงเส้น โดยการขึ้นค่าบริการทุกๆ 1 บาทต่อคน จะทำให้จำนวนสมาชิกลดลง 200 คน (ตัวอย่างเช่น ถ้าขึ้นค่าบริการ 5 บาทต่อคน เป็น 75 บาทต่อคน จะทำให้จำนวนสมาชิกลดลง 1,000 คน เหลือเพียง 17,000 คน) ให้ f แทนฟังก์ชันรายได้ต่อเดือนของสำนักข่าวเมื่อเก็บค่าบริการ x บาทต่อคน จะได้ว่ากราฟของฟังก์ชัน f มีลักษณะอย่างไร
1. เป็นรูปพาราโบลาหงายที่มีจุดยอดที่ $x = 0$
 2. เป็นรูปพาราโบลาหงายที่มีจุดยอดที่ $x = 70$
 3. เป็นรูปพาราโบลาคว่ำที่มีจุดยอดที่ $x = 75$
 4. เป็นรูปพาราโบลาคว่ำที่มีจุดยอดที่ $x = 80$
 5. เป็นกราฟเส้นตรงที่มีค่าความชันเป็นบวก

5. กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริงบวกที่สอดคล้องกับสมการ $e^{x^e} = e^e$ ค่าของ $\ln(\ln x)$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้
1. 0
 2. 1
 3. -1
 4. e
 5. $-e$

6. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย $f(x) = \sqrt{2-x}$ และ $g(x) = \log_3(5-x)$ จะได้ว่าโดเมนของฟังก์ชัน $f \circ g$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้
1. $(-\infty, 5)$
 2. $(-\infty, 2]$
 3. $(-3, 2]$
 4. $[-4, 5)$
 5. $[-4, \infty)$

7. ค่าของ $\cot\left(\frac{\pi}{12}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $\sqrt{3}$ 2. $2\sqrt{3}$ 3. $4\sqrt{3}$ 4. $\frac{9}{2}$ 5. $\frac{15}{2}$

8. กำหนดให้เมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการเชิงเส้นระบบหนึ่งคือ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & -1 & -4 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \end{array} \right]$

เมื่อใช้การดำเนินการตามแถวแปลงเมทริกซ์แต่งเติมนี้ได้เป็น $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & a \\ 0 & -1 & 3 & b \\ 0 & 0 & -1 & c \end{array} \right]$

จะได้ว่า $a + b + c$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -10 2. -5 3. 0 4. 5 5. 10

9. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 2c_1 & 2c_2 & 2c_3 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 - 3c_1 & a_2 - 3c_2 & a_3 - 3c_3 \end{bmatrix}$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $\det(B) = 2 \det(A)$

ข. $\det(C) = \det(A)$

ค. $\det(B + C) = 0$

ข้อใดกล่าวถูกต้องเสมอ

1. ข้อความ ข. ถูกต้องเพียงข้อเดียวเท่านั้น 2. ข้อความ ค. ถูกต้องเพียงข้อเดียวเท่านั้น
3. ข้อความ ก. และ ข. ถูกต้องเพียงสองข้อ 4. ข้อความ ก. และ ค. ถูกต้องเพียงสองข้อ
5. ข้อความทั้งสามถูกต้อง

13. ถ้า ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีพิกัดของ A, B และ C คือ $(7, 6), (1, 2)$ และ $(1, -2)$ ตามลำดับ แล้วส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยม ABC จากจุดยอด B ไปยังฐาน AC ยาวกี่หน่วย
1. 0.8 2. 1.6 3. 2.4 4. 4 5. 4.8

14. วงรีวงหนึ่ง มีจุด $P(0, 0)$ และ $Q(10, 0)$ เป็นจุดโฟกัส และมีจุด $R(15, 0)$ เป็นจุดที่อยู่บนวงรี ถ้าวงรีวงนี้ตัดแกน Y ที่จุด $(0, a)$ และ $(0, b)$ โดยที่ $a > b$ แล้ว $a - b$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. 10 2. 15 3. $10\sqrt{3}$ 4. 20 5. $20\sqrt{3}$

15. ให้ \vec{u} และ \vec{v} เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย และ θ เป็นขนาดของมุมระหว่าง \vec{u} และ \vec{v} ถ้า $\vec{u} - 2\vec{v}$ ตั้งฉากกับ $4\vec{u} + \vec{v}$ แล้ว $\sec \theta$ มีค่าเท่าใด

1. $\frac{7}{2}$ 2. $\frac{2}{7}$ 3. $\frac{\sqrt{85}}{2}$ 4. $\frac{2}{\sqrt{85}}$ 5. หาค่าไม่ได้

16. ให้ O เป็นจุดกำเนิดในระบบพิกัดฉากสามมิติ และให้ A และ B เป็นจุดที่มีพิกัดเป็น $(-3, 1, 0)$ และ $(t, -4, 4)$ ตามลำดับ โดยที่ t เป็นจำนวนจริงบวก ถ้า $|\overline{AB}| = 3|\overline{OA}|$ แล้วรูปสามเหลี่ยม OAB มีพื้นที่กี่ตารางหน่วย
1. $4\sqrt{7}$ 2. $2\sqrt{10}$ 3. $4\sqrt{10}$ 4. $2\sqrt{14}$ 5. $4\sqrt{14}$

17. น้องหมูแดงต้องการตั้งรหัสปลดล็อกโทรศัพท์มือถือเป็นรหัส 6 หลัก ประกอบด้วยตัวเลขที่แตกต่างกันทั้งหมด โดยมีเลข 0 อยู่หนึ่งตัว แต่ไม่มีเลข 1 ไม่มีเลข 4 และไม่มีเลข 7 จากข้อมูลนี้ มีรหัสปลดล็อกที่เป็นไปได้ทั้งหมดกี่แบบ
1. $6 \times 6!$ 2. $7 \times 6!$ 3. $3 \times 7!$ 4. 6×6^5 5. 6×7^5

18. ชาวญ่ข่มหยิบลูกบอลจากกล่องซึ่งมีลูกบอล 5 ลูก เป็นลูกบอลสีแดง 1 ลูก และลูกบอลสีขาว 4 ลูก เป็นจำนวน 5 ครั้ง โดยหลังการหยิบลูกบอลแต่ละครั้งจะนำลูกบอลที่หยิบได้ใส่คืน จงหาความน่าจะเป็นที่ชาวญ่ข่มจะหยิบได้ลูกบอลสีแดง 3 ครั้งจาก 5 ครั้ง
1. $\left(\frac{1}{5}\right)^3$ 2. $10\left(\frac{1}{5}\right)^3$ 3. $10\left(\frac{1}{5}\right)^5$ 4. $\left(\frac{1}{5}\right)^3 \left(\frac{4}{5}\right)^2$ 5. $10\left(\frac{1}{5}\right)^3 \left(\frac{4}{5}\right)^2$

19. ให้ x_1, x_2, \dots, x_{10} เป็นข้อมูลชุดหนึ่งที่มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตคือ 78
ถ้าตัด x_1 และ x_2 ออกไป จะทำให้ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดนี้เหลือ 70
ถ้าตัดเพียง x_1 ออกไป จะทำให้ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดนี้เหลือ 75
จงหาว่า $|x_1 - x_2|$ มีค่าเท่ากับข้อใด
1. 0 2. 10 3. 20 4. 30 5. 40
20. ในรายการเกมวัดดวง ผู้เข้าแข่งขันต้องเลือกกรรหส์ซึ่งประกอบด้วยเลขโดดจำนวน 3 ตัว (ที่ไม่จำเป็นต้องแตกต่างกัน) มาหนึ่งกรรหส์ หลังจากนั้น พิธีกรให้ข้อมูลว่าผู้เข้าแข่งขันจะได้รับรางวัล หากกรรหส์ที่เลือกนี้มีเลขโดดที่เป็นจำนวนคู่และมีเลขโดดที่มากกว่า 3 จงหาความน่าจะเป็นที่ผู้เข้าแข่งขันจะได้รับรางวัล
1. 0.181 2. 0.188 3. 0.300 4. 0.811 5. 0.819
21. นายสมจิตรพิมพ์รายงานฉบับหนึ่งที่มี 20 หน้า โดยในแต่ละหน้ามีความน่าจะเป็น 0.2 ที่นายสมจิตรจะพิมพ์คำบางคำในหน้านั้นผิด จงหาความน่าจะเป็นที่นายสมจิตรจะพิมพ์รายงานทั้งฉบับโดยไม่มีคำที่พิมพ์ผิดเลย
1. $(0.8)^{20}$ 2. $(0.2)^{20}$ 3. $20(0.8)^{20}$
4. $20(0.2)^{20}$ 5. $10(0.8)^{20} + 10(0.2)^{20}$

22. โรงงานแห่งหนึ่งผลิตน้ำผลไม้กล่องเพื่อจัดจำหน่าย โดยปริมาตรของน้ำผลไม้ในแต่ละกล่องมีการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ยเป็น 498.2 มิลลิลิตร และความแปรปรวนเป็น 1.44 มิลลิลิตร² กำหนดตารางค่าความน่าจะเป็นของการแจกแจงปกติมาตรฐานดังนี้

z	0.25	0.50	1.00	1.25	1.50
$P(Z < z)$	0.5987	0.6915	0.8413	0.8944	0.9332

จงหาความน่าจะเป็นที่น้ำผลไม้กล่องหนึ่งที่ผลิตจากโรงงานนี้มีปริมาตรเกิน 500 มิลลิลิตร

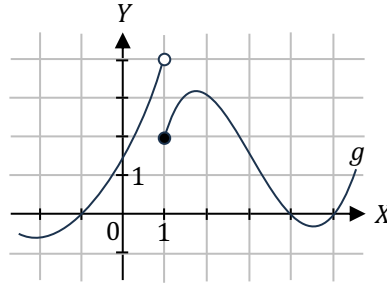
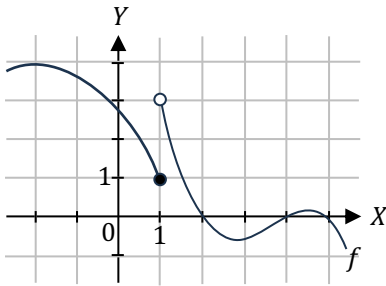
1. 0.9332 2. 0.8944 3. 0.3085 4. 0.1056 5. 0.0668

23. ให้ $F'(2x) = f(x + 2)$ โดยที่ $F(0) = 10$, $F(1) = 14.5$, $F(2) = 20$ และ $F(3) = 26.5$

ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[2, 3]$ แล้ว $\int_2^3 f(x) dx$ มีค่าเท่ากับข้อใด

1. 3.25 2. 5 3. 6.5 4. 8.25 5. 10

24. กำหนดกราฟของฟังก์ชัน f และ g ดังรูป



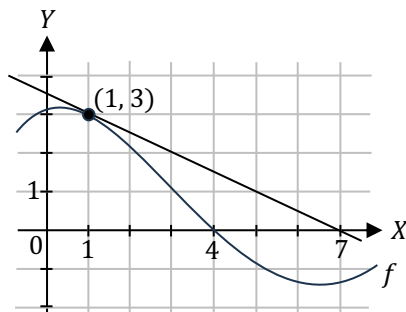
พิจารณาข้อความต่อไปนี้

- ก. $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + g(x))$ หาค่าได้
 ข. ฟังก์ชัน $f + g$ มีความต่อเนื่องบนช่วง $[-2, 5]$
 ค. $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) g(x))$ หาค่าได้

จากข้อความ ก. ข. และ ค. ข้างต้น ข้อความใดต่อไปนี้กล่าวถูกต้อง

1. ข้อความ ก. ถูกต้องเพียงข้อเดียว
2. ข้อความ ค. ถูกต้องเพียงข้อเดียว
3. ข้อความ ก. และ ข. ถูกต้องเพียงสองข้อ
4. ข้อความ ก. และ ค. ถูกต้องเพียงสองข้อ
5. ข้อความ ข. และ ค. ถูกต้องเพียงสองข้อ

25. ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีกราฟและเส้นสัมผัสที่ $x = 1$ ดังรูป



ค่าของ $f'(1)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -3
2. -2
3. $-\frac{1}{2}$
4. $\frac{1}{2}$
5. 3

ตอนที่ 2 แบบบรรยายตัวเลขที่เป็นคำตอบ จำนวน 5 ข้อ (ข้อที่ 26 – 30) ข้อละ 5 คะแนน รวม 25 คะแนน

26. กำหนดให้รูปสามเหลี่ยม ABC สอดคล้องกับสมการ $\frac{\sin A}{4} = \frac{\sin B}{5} = \frac{\sin C}{6}$ จงหาค่าของ $\cos A$

27. ถ้า $z_1 = 3 - 2i$ และ $z_2 = 1 + 5i$ แล้ว $|z_1^2 + 2z_1z_2 + z_2^2|$ มีค่าเท่าใด

28. ให้ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ เป็นลำดับเลขคณิตที่มี $a_6 = -17$ และ $a_{17} = -50$
 ถ้า s และ t เป็นจำนวนเต็มบวกที่ทำให้ $3^{a_1} + 3^{a_2} + 3^{a_3} + \dots + 3^{a_n} + \dots = \frac{s}{t}$
 โดยที่ $\frac{s}{t}$ เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ แล้ว $s + t$ เท่ากับเท่าใด

29. กำหนดให้ A, B, C เป็นเซต

โดยที่ $n(A) = 40$, $n(A \cap B) = 27$, $n(A \cap C) = 21$ และ $n(A \cap B \cap C) = 10$

จงหาจำนวนสมาชิกของเซต $A - (B \cup C)$

30. นิกกี้แบ่งเวลาอ่านหนังสือเตรียมสอบ 4 วิชา (คณิตศาสตร์ เคมี ฟิสิกส์ ชีววิทยา) ใน 3 วัน (จันทร์ อังคาร พุธ)

โดยแต่ละวิชาจะอ่านเป็นเวลาเพียงครึ่งวันในช่วงเช้าหรือช่วงบ่ายของวันใดวันหนึ่งเพียงวันเดียว โดยมีเงื่อนไขดังนี้

- ทุกวันอ่านหนังสืออย่างน้อยหนึ่งวิชา
- วิชาเคมีอ่านก่อนวันพุธ

จงหาจำนวนวิธีการจัดตารางการอ่านหนังสือของนิกกี้

เฉลย

1. 3	7. 2	13. 3	19. 2	25. 3
2. 4	8. 5	14. 2	20. 5	26. 0.75
3. 4	9. 2	15. 1	21. 1	27. 25
4. 4	10. 3	16. 4	22. 5	28. 29
5. 3	11. 1	17. 1	23. 2	29. 2
6. 4	12. 4	18. 5	24. 1	30. 192

แนวคิด

1. สำหรับเซต S ใดๆ ให้ $P(S)$ แทนเพาเวอร์เซตของ S
ให้เซต $A = \{\emptyset, \sqrt{2}\}$ แล้วเซต $P(P(A)) \cup P(A)$ มีสมาชิกกี่ตัว

1. 10 2. 16 3. 18 4. 19 5. 20

ตอบ 3

เนื่องจาก A มีสมาชิก 2 ตัว ดังนั้น $P(A)$ จะมีสมาชิก $2^2 = 4$ ตัว
 $P(P(A))$ จะมีสมาชิก $2^4 = 16$ ตัว

ลองเขียน $P(A)$ ดู จะได้ $P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\sqrt{2}\}, \{\emptyset, \sqrt{2}\}\}$ (แต่ $P(P(A))$ อาจละเอียดจนเขียนไม่ไหว)
โจทย์ถามจำนวนสมาชิกของ $P(P(A)) \cup P(A)$

→ ต้องหาว่า สมาชิก 4 ตัวของ $P(A)$ จะไปเพิ่มให้สมาชิก 16 ตัวของ $P(P(A))$ ได้กี่ตัว (ตัวซ้ำจะไม่นับเพิ่ม)
นั่นคือ ต้องหาว่า สมาชิก 4 ตัวของ $P(A)$ มีกี่ตัวที่ไม่ได้เป็นสมาชิกของ $P(P(A))$ อยู่แล้ว
นั่นคือ ต้องหาว่า สมาชิก 4 ตัวของ $P(A)$ มีกี่ตัวที่ไม่ได้เป็นสับเซตของ $P(A)$
(เพาเวอร์เซตคือเซตของสับเซต ดังนั้น "เป็นสมาชิกของ $P(P(A))$ " แปลว่า "เป็นสับเซตของ $P(A)$ ")

- $\emptyset \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\sqrt{2}\}, \{\emptyset, \sqrt{2}\}\}$ เพราะ \emptyset เป็นสับเซตของทุกเซต
 - $\{\emptyset\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\sqrt{2}\}, \{\emptyset, \sqrt{2}\}\}$ เพราะ \emptyset เป็นสมาชิกของฝั่งขวา (ตัวซ้ายสุดของฝั่งขวา)
 - $\{\sqrt{2}\} \not\subset \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\sqrt{2}\}, \{\emptyset, \sqrt{2}\}\}$
 - $\{\emptyset, \sqrt{2}\} \not\subset \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\sqrt{2}\}, \{\emptyset, \sqrt{2}\}\}$
- } เพราะ $\sqrt{2}$ ไม่ตรงกับสมาชิกตัวไหนใน 4 ตัวของ $P(A)$

ดังนั้น จะมีเพียง $\{\sqrt{2}\}$ และ $\{\emptyset, \sqrt{2}\}$ ที่ไม่ได้เป็นสมาชิกของ $P(P(A))$

นั่นคือ $P(A)$ จะเพิ่มจำนวนสมาชิกให้ $P(P(A))$ ได้ 2 ตัว

ดังนั้น $P(P(A)) \cup P(A)$ จะมีสมาชิก $16 + 2 = 18$ ตัว

2. ให้ p, q และ r เป็นประพจน์ แล้วประพจน์ใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็นจริงในบางกรณี และเป็นเท็จในบางกรณี

1. $(p \vee \sim p) \rightarrow (r \wedge \sim r)$ 2. $(\sim p \wedge q) \wedge (p \wedge r)$ 3. $(q \rightarrow r) \leftrightarrow (q \wedge \sim r)$
4. $(p \vee r) \wedge (q \vee \sim r)$ 5. $(p \wedge q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$

ตอบ 4

1. $(p \vee \sim p) \rightarrow (r \wedge \sim r)$ 2. $(\sim p \wedge q) \wedge (p \wedge r)$
 $\equiv T \rightarrow F$ $\equiv \sim p \wedge q \wedge p \wedge r$ $\left. \begin{array}{l} \text{ทุกตัว } \wedge \text{ กันอยู่ ถอดวงเล็บออกได้} \\ \equiv \sim p \wedge p \wedge q \wedge r \\ \equiv F \wedge q \wedge r \\ \equiv F \end{array} \right\}$
 $\equiv F$

3. สังเกตว่า $q \rightarrow r$ กับ $q \wedge \sim r$ เป็นนิเสธกัน : $\sim(q \rightarrow r) \equiv \sim(\sim q \vee r) \equiv q \wedge \sim r$
ซึ่งประพจน์ที่เป็นนิเสธกัน ก็ต่อเมื่อกัน จะเป็น F เสมอ (ก็ต่อเมื่อ เป็น T เมื่อประพจน์มีค่าความจริงเหมือนกัน)

4. $(p \vee r) \wedge (q \vee \sim r)$ จะเห็นว่า r กับ $\sim r$ จะมีตัวหนึ่งจริง ตัวหนึ่งเท็จ ทำให้ p กับ q ไม่ถูกกลืนพร้อมกันทั้งคู่
สมมติให้ r เป็น T จะได้ $(p \vee T) \wedge (q \vee F)$
 $\equiv T \wedge q$
 $\equiv q$ ซึ่งอาจเป็น T หรือ F ก็ได้ ขึ้นกับค่า q

6. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย $f(x) = \sqrt{2-x}$ และ $g(x) = \log_3(5-x)$
 จะได้ว่าโดเมนของฟังก์ชัน $f \circ g$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $(-\infty, 5)$ 2. $(-\infty, 2]$ 3. $(-3, 2]$ 4. $[-4, 5)$ 5. $[-4, \infty)$

ตอบ 4

เนื่องจาก $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\log_3(5-x)) = \sqrt{2 - \log_3(5-x)}$

ในรูปห้ามติดลบ : $2 - \log_3(5-x) \geq 0$ $2 \geq \log_3(5-x)$ $3^2 \geq 5-x$ $x \geq -4$		หลัง log ต้องเป็นบวก : $5-x > 0$ $5 > x$
--	--	---

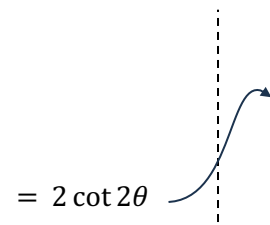
จะได้โดเมนคือ $[-4, 5]$

7. ค่าของ $\cot\left(\frac{\pi}{12}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $\sqrt{3}$ 2. $2\sqrt{3}$ 3. $4\sqrt{3}$ 4. $\frac{9}{2}$ 5. $\frac{15}{2}$

ตอบ 2

$$\begin{aligned} \cot \theta - \tan \theta &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\ &= \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{\cos 2\theta}{\sin \theta \cos \theta} \cdot \frac{2}{2} \\ &= \frac{2 \cos 2\theta}{\sin 2\theta} = 2 \cot 2\theta \end{aligned}$$



ดังนั้น $\cot\left(\frac{\pi}{12}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 \cot\left(2 \cdot \frac{\pi}{12}\right)$
 $= 2 \cot\left(\frac{\pi}{6}\right)$
 $= 2\sqrt{3}$

8. กำหนดให้เมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการเชิงเส้นระบบหนึ่งคือ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & -1 & -4 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \end{array} \right]$

เมื่อใช้การดำเนินการตามแถวแปลงเมทริกซ์แต่งเติมนี้ได้เป็น $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & a \\ 0 & -1 & 3 & b \\ 0 & 0 & -1 & c \end{array} \right]$

จะได้ว่า $a + b + c$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -10 2. -5 3. 0 4. 5 5. 10

ตอบ 5

ก็คือ ต้องแปลงเมทริกซ์แต่งเติมที่โจทย์กำหนด ให้ตัวเลขใต้แนวเส้นทแยงมุมหลักกลายเป็น 0

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & -1 & -4 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \end{array} \right] \begin{array}{l} 2R_1 + R_2 \\ -R_1 + R_3 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right]$$

จะได้ $a + b + c = 5 + 6 + (-1) = 10$

9. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 2c_1 & 2c_2 & 2c_3 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 - 3c_1 & a_2 - 3c_2 & a_3 - 3c_3 \end{bmatrix}$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $\det(B) = 2 \det(A)$

ข. $\det(C) = \det(A)$

ค. $\det(B + C) = 0$

ข้อใดกล่าวถูกต้องเสมอ

1. ข้อความ ข. ถูกต้องเพียงข้อเดียวเท่านั้น
2. ข้อความ ค. ถูกต้องเพียงข้อเดียวเท่านั้น
3. ข้อความ ก. และ ข. ถูกต้องเพียงสองข้อ
4. ข้อความ ก. และ ค. ถูกต้องเพียงสองข้อ
5. ข้อความทั้งสามถูกต้อง

ตอบ 2

ก. B ได้จากการนำ A มาสลับแถว 1 กับแถว 2 และคูณ 2 เข้าไปที่แถว 3

- การสลับแถว จะทำให้ \det เป็นลบของของเดิม
- การคูณ 2 เข้าไปที่แถว 3 จะทำให้ \det เพิ่มขึ้นเป็น 2 เท่า

ดังนั้น $\det(B) = -2 \det(A) \rightarrow$ ก. ผิด

ข. C ได้จากการคูณ -3 เข้าไปที่แถว 3 แล้วนำแถว 1 บวกเข้าไปที่แถว 3

- การคูณ -3 เข้าไปที่แถว 3 จะทำให้ \det เปลี่ยนเป็น -3 เท่า
- นำแถว 1 บวกเข้าไปที่แถว 3 จะไม่ทำให้ \det เปลี่ยน

ดังนั้น $\det(C) = -3 \det(A) \rightarrow$ ข. ผิด

ค. จะได้ $B + C = \begin{bmatrix} b_1 + a_1 & b_2 + a_2 & b_3 + a_3 \\ a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & a_3 + b_3 \\ a_1 - c_1 & a_2 - c_2 & a_3 - c_3 \end{bmatrix}$ ซึ่งจะเห็นว่าแถว 1 กับแถว 2 ซ้ำกัน

ดังนั้น $\det(B + C) = 0 \rightarrow$ ค. ถูก

10. ให้ a_n เป็นลำดับที่สอดคล้องกับ $a_{n+1} = a_n + \frac{n}{2}$ สำหรับทุกจำนวนนับ n

ถ้า $a_{30} = 219$ แล้ว a_1 มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -29
2. $-\frac{27}{2}$
3. $\frac{3}{2}$
4. 16
5. 30

ตอบ 3

จาก $a_{n+1} = a_n + \frac{n}{2} \dots (*)$

แทน $n = 29$ จะได้ $a_{30} = a_{29} + \frac{29}{2}$

$219 = a_{28} + \frac{28}{2} + \frac{29}{2}$ ↪ แทน $n = 28$ ใน (*)

$219 = a_{27} + \frac{27}{2} + \frac{28}{2} + \frac{29}{2}$ ↪ แทน $n = 27$ ใน (*)

⋮

$219 = a_1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \dots + \frac{27}{2} + \frac{28}{2} + \frac{29}{2}$

$219 = a_1 + \frac{1+2+3+\dots+29}{2}$ ↪ $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

$219 = a_1 + \frac{(29)(29+1)}{2}$

$219 = a_1 + \frac{435}{2}$

$\frac{3}{2} = a_1$

11. พิจารณาอสมการ $x^2 - 4x + 1 < 0$

ถ้า a เป็นจำนวนเต็มที่น้อยที่สุดที่สอดคล้องกับอสมการดังกล่าว

และ b เป็นจำนวนเต็มที่มากที่สุดที่สอดคล้องกับอสมการดังกล่าว

แล้วระยะห่างที่น้อยที่สุดระหว่างจำนวนเต็มบวกและจำนวนเต็มลบที่เป็นคำตอบของอสมการ $|x - a| \geq b$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

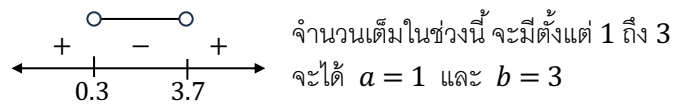
1. 6 2. 8 3. 10 4. 12 5. 14

ตอบ 1

$x^2 - 4x + 1$ แยกตัวประกอบไม่ได้ → ต้องใช้สูตรคำตอบของสมการกำลังสอง

$$\text{จะได้ } x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$\sim 2 \pm 1.7 = 0.3, 3.7$$



แก้อสมการ $|x - 1| \geq 3$ จะได้ $x - 1 \geq 3$ หรือ $x - 1 \leq -3$
 $x \geq 4$ $x \leq -2$

ระยะห่างที่โจทย์ถาม จะน้อยที่สุด เมื่อใช้จำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุด ลบกับ จำนวนเต็มลบที่มากที่สุด

$$= 4 - (-2) = 6$$

12. บังฝากเงินครั้งแรก 1,000 บาทตอนต้นปีที่ 1 และฝากเพิ่มในบัญชีเดิมอีก 1,000 ตอนต้นปีที่ 2 ถ้าบัญชีนี้ได้รับ ดอกเบี้ยในอัตราร้อยละ 1 ต่อปี คิดดอกเบี้ยทบต้นทุกปี หากบึงต้องการให้เงินในบัญชีมีมากกว่า 4,020 บาท บึงต้องคงเงินจำนวนนี้ไว้ในธนาคารอย่างน้อยกี่ปีนับตั้งแต่ที่เริ่มฝากเงินครั้งแรก (กำหนดให้ $\log_{1.01} 2 \approx 69.6$)

1. 68 ปี 2. 69 ปี 3. 70 ปี 4. 71 ปี 5. 72 ปี

ตอบ 4

ดอกเบี้ยร้อยละ 1 จะได้ $1 + r = 1 + \frac{1}{100} = 1.01$

เมื่อผ่านไป n ปี เงินฝากครั้งแรก จะเพิ่มเป็น $1000(1.01)^n$ บาท

เงินฝากครั้งที่ 2 ฝากหลังจากนั้น 1 ปี ดังนั้น จะมีจำนวนปีที่ฝาก น้อยกว่าอยู่ 1 ปี นั่นคือจะมีจำนวนปี = $n - 1$ ปี

ดังนั้น เงินฝากครั้งที่ 2 จะเพิ่มเป็น $1000(1.01)^{n-1}$ บาท

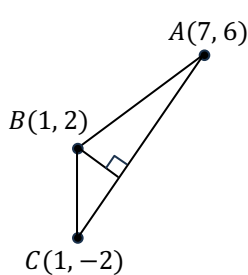
ต้องการให้เงินมากกว่า 4,020 จะได้อสมการคือ

$$\begin{aligned} 1000(1.01)^{n-1} + 1000(1.01)^{n-1} &> 4020 \\ 1000(1.01)^{n-1} (1.01 + 1) &> 4020 \quad \leftarrow \text{ดึงตัวร่วม} \\ 1000(1.01)^{n-1} (2.01) &> 4020 \\ 1000(1.01)^{n-1} &> 2000 \\ (1.01)^{n-1} &> 2 \\ n - 1 &> \log_{1.01} 2 \approx 69.6 \\ n &> 70.6 \rightarrow \text{ต้องคงเงินอย่างน้อย 71 ปี} \end{aligned}$$

13. ถ้า ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีพิกัดของ A, B และ C คือ $(7, 6), (1, 2)$ และ $(1, -2)$ ตามลำดับ แล้วส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยม ABC จากจุดยอด B ไปยังฐาน AC ยาวกี่หน่วย

1. 0.8 2. 1.6 3. 2.4 4. 4 5. 4.8

ตอบ 3



ส่วนสูงจะเท่ากับระยะทางจาก B ไปยัง \overline{AC}

สมการเส้นตรงที่ผ่าน (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) คือ $\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

จะได้สมการเส้นตรงที่ผ่าน $A(7, 6)$ และ $C(1, -2)$ คือ $\frac{y-6}{x-7} = \frac{6-(-2)}{7-1}$

$$6y - 36 = 8x - 56$$

$$\div 2 \text{ ตลอด} \quad 0 = 8x - 6y - 20$$

$$0 = 4x - 3y - 10$$

ระยะจาก (x_1, y_1) ไปยังเส้นตรง $Ax + By + C = 0$ คือ $\frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

จะได้ระยะจาก $B(1, 2)$ ไปยัง $4x - 3y - 10 = 0$ คือ $\frac{|4(1) - 3(2) - 10|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{12}{5} = 2.4$

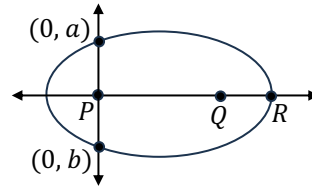
14. วงรีวงหนึ่ง มีจุด $P(0, 0)$ และ $Q(10, 0)$ เป็นจุดโฟกัส และมีจุด $R(15, 0)$ เป็นจุดที่อยู่บนวงรี ถ้าวงรีนี้ตัดแกน Y ที่จุด $(0, a)$ และ $(0, b)$ โดยที่ $a > b$ แล้ว $a - b$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 10 2. 15 3. $10\sqrt{3}$ 4. 20 5. $20\sqrt{3}$

ตอบ 2

จากรูป จะพบว่า $a - b$ ก็คือความยาวเลตัสเรคตัมนั่นเอง (ข้อนี้ใจร้ายตรงที่เอาตัวแปร a กับ b ที่อยู่ในสูตรวงรีมาใช้ในความหมายอื่น)

ซึ่งความยาวเลตัสเรคตัม จะหาได้จากสูตร $\frac{2(\text{ครึ่งแกนโท})^2}{\text{ครึ่งแกนเอก}} \dots (*)$



จากสมบัติของจุดบนวงรี จะได้ $PR + RQ = \text{ความยาวแกนเอก}$

$$(15 - 0) + (15 - 10) = 20 \rightarrow \text{ครึ่งแกนเอก} = \frac{20}{2} = 10$$

จาก $P(0, 0)$ และ $Q(10, 0)$ จะได้ระยะโฟกัส $= \frac{PQ}{2} = \frac{10-0}{2} = 5$

ครึ่งแกนโท จะหาได้จากสูตร $\sqrt{\text{ครึ่งแกนเอก}^2 - \text{ระยะโฟกัส}^2} = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75}$

แทนใน (*) จะได้ $a - b = \frac{2(\sqrt{75}^2)}{10} = 15$

15. ให้ \vec{u} และ \vec{v} เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย และ θ เป็นขนาดของมุมระหว่าง \vec{u} และ \vec{v}

ถ้า $\vec{u} - 2\vec{v}$ ตั้งฉากกับ $4\vec{u} + \vec{v}$ แล้ว $\sec \theta$ มีค่าเท่าใด

1. $\frac{7}{2}$ 2. $\frac{2}{7}$ 3. $\frac{\sqrt{85}}{2}$ 4. $\frac{2}{\sqrt{85}}$ 5. หาค่าไม่ได้

ตอบ 1

ตั้งฉากกันจะตอบกันเป็น 0: $(\vec{u} - 2\vec{v}) \cdot (4\vec{u} + \vec{v}) = 0$

$$4\vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} - 8\vec{u} \cdot \vec{v} - 2\vec{v} \cdot \vec{v} = 0$$

$$4|\vec{u}|^2 - 7\vec{u} \cdot \vec{v} - 2|\vec{v}|^2 = 0$$

\vec{u}, \vec{v} เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\rightarrow 4|\vec{u}|^2 - 7|\vec{u}||\vec{v}|\cos \theta - 2|\vec{v}|^2 = 0$

จึงมีขนาด = 1 $\rightarrow 4 - 7\cos \theta - 2 = 0$

$$2 = 7\cos \theta$$

$$\frac{2}{7} = \cos \theta \rightarrow \text{จะได้ } \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{7}{2}$$

16. ให้ O เป็นจุดกำเนิดในระบบพิกัดฉากสามมิติ และให้ A และ B เป็นจุดที่มีพิกัดเป็น $(-3, 1, 0)$ และ $(t, -4, 4)$ ตามลำดับ โดยที่ t เป็นจำนวนจริงบวก ถ้า $|\overline{AB}| = 3|\overline{OA}|$ แล้วรูปสามเหลี่ยม OAB มีพื้นที่ที่ตารางหน่วย
1. $4\sqrt{7}$
 2. $2\sqrt{10}$
 3. $4\sqrt{10}$
 4. $2\sqrt{14}$
 5. $4\sqrt{14}$

ตอบ 4

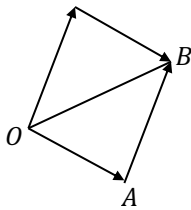
เวกเตอร์จาก (x_1, y_1, z_1) ไป (x_2, y_2, z_2) คือ $\begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}$

ขนาดของ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ คือ $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

จะได้ $\overline{AB} = \begin{bmatrix} t - (-3) \\ -4 - 1 \\ 4 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t + 3 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}$ และ $\overline{OA} = \begin{bmatrix} 0 - (-3) \\ 0 - 1 \\ 0 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ O เป็นจุดกำเนิด
จะมีพิกัดคือ $(0, 0, 0)$

$|\overline{AB}| = \sqrt{(t+3)^2 + (-5)^2 + 4^2} = \sqrt{(t+3)^2 + 41}$ $|\overline{OA}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{10}$

จาก $|\overline{AB}| = 3|\overline{OA}|$ จะได้ $\sqrt{(t+3)^2 + 41} = 3\sqrt{10}$
 $(t+3)^2 + 41 = 9(10)$
 $(t+3)^2 = 49$
 $t+3 = 7, -7$
 $t = 4, -10$ โจทย์ให้ t เป็นบวก



สามเหลี่ยม OAB คือครึ่งหนึ่งของสี่เหลี่ยมด้านขนานที่เกิดจาก \overline{OA} และ \overline{OB}

สี่เหลี่ยมด้านขนานที่เกิดจาก \vec{u} และ \vec{v} จะมีพื้นที่ $= |\vec{u} \times \vec{v}|$

จะได้ $\Delta OAB = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{OA}|$
 $= \frac{1}{2} \left| \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right|$
 $= \frac{1}{2} \left| \begin{bmatrix} (-5)(0) - (4)(-1) \\ (4)(3) - (7)(0) \\ (7)(-1) - (-5)(3) \end{bmatrix} \right|$ $= \frac{1}{2} \left| \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 8 \end{bmatrix} \right|$
 $= \frac{1}{2} \sqrt{4^2 + 12^2 + 8^2}$
 $= \frac{1}{2} (4) \sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2}$
 $= 2\sqrt{14}$

17. น้องหนูตั้งต้องการตั้งรหัสปลดล็อกโทรศัพท์มือถือเป็นรหัส 6 หลัก ประกอบด้วยตัวเลขที่แตกต่างกันทั้งหมด โดยมีเลข 0 อยู่หนึ่งตัว แต่ไม่มีเลข 1 ไม่มีเลข 4 และไม่มีเลข 7 จากข้อมูลนี้ มีรหัสปลดล็อกที่เป็นไปได้ทั้งหมดกี่แบบ
1. $6 \times 6!$
 2. $7 \times 6!$
 3. $3 \times 7!$
 4. 6×6^5
 5. 6×7^5

ตอบ 1

รหัสมี 6 หลัก \rightarrow เลือกหลักที่เลข 0 จะไปอยู่ เลือกได้ 6 แบบ
 5 หลักที่เหลือ ต้องไม่ใช่ 0, 1, 4 หรือ 7 จะเหลือตัวเลข 2, 3, 5, 6, 8, 9 ทั้งหมด 6 ตัว ให้เลือกใส่
 เลือก 5 ตัวจากตัวเลข 6 ตัว มาเรียงใส่หลักที่เหลือ จะทำได้ $P_{6,5} = \frac{6!}{(6-5)!} = 6!$ แบบ
 ดังนั้น จะได้จำนวนแบบทั้งหมด $= 6 \times 6!$ แบบ

18. ขวัญสุ่มหยิบลูกบอลจากกล่องซึ่งมีลูกบอล 5 ลูก เป็นลูกบอลสีแดง 1 ลูก และลูกบอลสีขาว 4 ลูก เป็นจำนวน 5 ครั้ง โดยหลังการหยิบลูกบอลแต่ละครั้งจะนำลูกบอลที่หยิบได้ใส่คืน จงหาความน่าจะเป็นที่ขวัญจะหยิบได้ลูกบอลสีแดง 3 ครั้งจาก 5 ครั้ง

1. $\left(\frac{1}{5}\right)^3$ 2. $10\left(\frac{1}{5}\right)^3$ 3. $10\left(\frac{1}{5}\right)^5$ 4. $\left(\frac{1}{5}\right)^3 \left(\frac{4}{5}\right)^2$ 5. $10\left(\frac{1}{5}\right)^3 \left(\frac{4}{5}\right)^2$

ตอบ 5

ใช้สูตรการแจกแจงทวินาม $P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$: หยิบ 5 ครั้ง $\rightarrow n = 5$

ต้องการได้สีแดง 3 ครั้ง $\rightarrow x = 3$

ความน่าจะเป็นที่จะได้สีแดงในแต่ละครั้ง $p = \frac{1}{5}$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } P(X = 3) &= \binom{5}{3} \left(\frac{1}{5}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{5}\right)^{5-3} \\ &= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 10 \left(\frac{1}{5}\right)^3 \left(\frac{4}{5}\right)^2 \end{aligned}$$

19. ให้ x_1, x_2, \dots, x_{10} เป็นข้อมูลชุดหนึ่งที่มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตคือ 78

ถ้าตัด x_1 และ x_2 ออกไป จะทำให้ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดนี้เหลือ 70

ถ้าตัดเพียง x_1 ออกไป จะทำให้ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดนี้เหลือ 75

จงหาว่า $|x_1 - x_2|$ มีค่าเท่ากับข้อใด

1. 0 2. 10 3. 20 4. 30 5. 40

ตอบ 2

ค่าเฉลี่ยของทั้งหมด 10 ตัว คือ 78 \rightarrow จะได้ผลรวมของทั้ง 10 ตัว คือ $10 \times 78 = 780$... (1)

ตัด x_1 ออก เหลือ 9 ตัว เหลือค่าเฉลี่ย 75 \rightarrow จะได้ผลรวมของ 9 ตัวหลัง คือ $9 \times 75 = 675$... (2)

(1) และ (2) ต่างกันที่ $x_1 \rightarrow$ จะสรุปได้ว่า $x_1 = 780 - 675 = 105$

ตัด x_1 และ x_2 ออก เหลือ 8 ตัว เหลือค่าเฉลี่ย 70 \rightarrow จะได้ผลรวมของ 8 ตัวหลัง คือ $8 \times 70 = 560$... (3)

(2) และ (3) ต่างกันที่ $x_2 \rightarrow$ จะสรุปได้ว่า $x_2 = 675 - 560 = 115$

จะได้ $|x_1 - x_2| = |105 - 115| = |-10| = 10$

20. ในรายการเกมวัดดวง ผู้เข้าแข่งขันต้องเลือกรหัสซึ่งประกอบด้วยเลขโดดจำนวน 3 ตัว (ที่ไม่จำเป็นต้องแตกต่างกัน)

มาหนึ่งรหัส หลังจากนั้น พิธีกรให้ข้อมูลว่าผู้เข้าแข่งขันจะได้รับรางวัล หากรหัสที่เลือกนี้มีเลขโดดที่เป็นจำนวนคี่และมีเลขโดดที่มากกว่า 3 จงหาความน่าจะเป็นที่ผู้เข้าแข่งขันจะได้รับรางวัล

1. 0.181 2. 0.188 3. 0.300 4. 0.811 5. 0.819

ตอบ 5

จำนวนแบบทั้งหมด : แต่ละหลักเลือก 0, 1, 2, ..., 9 ได้ 10 แบบ

มี 3 หลัก \rightarrow จะได้จำนวนแบบทั้งหมด = $10^3 = 1,000$ แบบ

จำนวนแบบที่ต้องการ : จะหาจาก แบบทั้งหมด - แบบตรงข้าม ... (*)

ตรงข้ามกับ “ มีเลขโดดคี่ และ มี เลขโดดมากกว่า 3 ”

คือ “ไม่มีเลขโดดคี่ หรือ ไม่มีเลขโดดมากกว่า 3”

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$\begin{aligned} &= \begin{array}{c} \text{ไม่มีเลขโดดคี่} \\ \downarrow \\ \text{เลือก } 0, 2, 4, 6, 8 \text{ ได้ } 5 \text{ แบบ} \\ \text{มี 3 หลัก} \rightarrow 5^3 \text{ แบบ} \end{array} + \begin{array}{c} \text{ไม่มีเลขโดดมากกว่า 3} \\ \downarrow \\ \text{เลือก } 0, 1, 2, 3 \text{ ได้ } 4 \text{ แบบ} \\ \text{มี 3 หลัก} \rightarrow 4^3 \text{ แบบ} \end{array} - \begin{array}{c} \text{(ไม่มีเลขโดดคี่ และ ไม่มีเลขโดดมากกว่า 3)} \\ \downarrow \\ \text{เลือก } 0, 2 \text{ ได้ } 2 \text{ แบบ} \\ \text{มี 3 หลัก} \rightarrow 2^3 \text{ แบบ} \end{array} \end{aligned}$$

แทนใน (*) จะได้ $1,000 - (5^3 + 4^3 - 2^3) = 1,000 - (125 + 64 - 8) = 819$ แบบ

จะได้ความน่าจะเป็น = $\frac{819}{1000} = 0.819$

21. นายสมจิตรพิมพ์รายงานฉบับหนึ่งที่มี 20 หน้า โดยในแต่ละหน้ามีความน่าจะเป็น 0.2 ที่นายสมจิตรจะพิมพ์คำบางคำในหน้านั้นผิด จงหาความน่าจะเป็นที่นายสมจิตรจะพิมพ์รายงานทั้งฉบับโดยไม่มีคำที่พิมพ์ผิดเลย
1. $(0.8)^{20}$
 2. $(0.2)^{20}$
 3. $20(0.8)^{20}$
 4. $20(0.2)^{20}$
 5. $10(0.8)^{20} + 10(0.2)^{20}$

ตอบ 1

ใช้สูตรการแจกแจงทวินาม $P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}$: พิมพ์ 20 หน้า $\rightarrow n = 20$
 ต้องการให้ไม่มีหน้าที่มีคำผิดเลย $\rightarrow x = 0$
 ความน่าจะเป็นที่จะมีคำผิดในแต่ละหน้า $p = 0.2$
 จะได้ $P(X = 0) = \binom{20}{0} (0.2)^0 (1 - 0.2)^{20-0} = (0.8)^{20}$

22. โรงงานแห่งหนึ่งผลิตน้ำผลไม้กล่องเพื่อจัดจำหน่าย โดยปริมาตรของน้ำผลไม้ในแต่ละกล่องมีการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ยเป็น 498.2 มิลลิลิตร และความแปรปรวนเป็น 1.44 มิลลิลิตร² กำหนดตารางค่าความน่าจะเป็นของการแจกแจงปกติมาตรฐานดังนี้

z	0.25	0.50	1.00	1.25	1.50
$P(Z < z)$	0.5987	0.6915	0.8413	0.8944	0.9332

จงหาความน่าจะเป็นที่น้ำผลไม้กล่องหนึ่งผลิตจากโรงงานนี้มีปริมาตรเกิน 500 มิลลิลิตร

1. 0.9332
2. 0.8944
3. 0.3085
4. 0.1056
5. 0.0668

ตอบ 5

จะได้ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน $= \sqrt{\text{ความแปรปรวน}} = \sqrt{1.44} = 1.2$ มิลลิลิตร
 ใช้สูตร $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ แปลง 500 มิลลิลิตร เป็นค่ามาตรฐาน จะได้ $z = \frac{500 - 498.2}{1.2} = \frac{1.8}{1.2} = 1.5$
 ซึ่งจากตาราง เมื่อ $z = 1.5$ จะได้ $P(Z < 1.5) = 0.9332$
 ความน่าจะเป็นที่ปริมาตรเกิน 500 คือ $P(X > 500) = P(Z > 1.5)$
 $= 1 - P(Z < 1.5)$
 $= 1 - 0.9332 = 0.0668$

23. ให้ $F'(2x) = f(x + 2)$ โดยที่ $F(0) = 10, F(1) = 14.5, F(2) = 20$ และ $F(3) = 26.5$

ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[2, 3]$ แล้ว $\int_2^3 f(x) dx$ มีค่าเท่ากับข้อใด

1. 3.25
2. 5
3. 6.5
4. 8.25
5. 10

ตอบ 2

จาก $F'(2x) = f(x + 2)$ แทน x ด้วย $x - 2$
 $F'(2(x - 2)) = f(x - 2 + 2)$
 $F'(2x - 4) = f(x)$ ดังนั้น $\int f(x) dx = \int F'(2x - 4) dx \dots (*)$

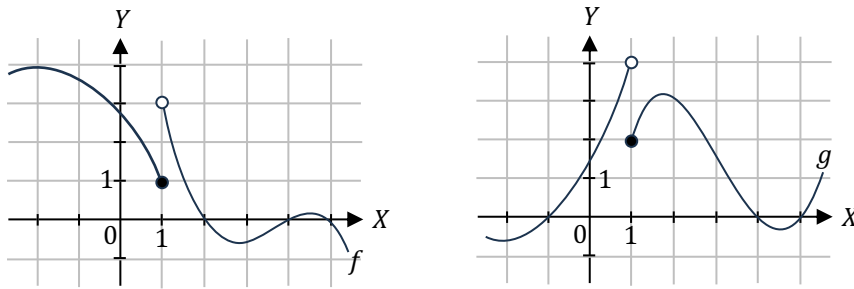
แต่ $F'(2x - 4)$ คือ $\frac{d}{d(2x-4)} F(2x - 4)$ เป็นการดิฟเทียบกับ $2x - 4$ จึงยังหักล้างกับอินทิเกรตแบบ dx ไม่ได้

จะเปลี่ยนให้เป็น $\frac{d}{dx}$ โดยใช้นกฏลูกโซ่ $\frac{d}{dx} F(2x - 4) = \frac{d}{d(2x-4)} F(2x - 4) \cdot \frac{d}{dx} (2x - 4)$
 $\frac{d}{dx} F(2x - 4) = F'(2x - 4) \cdot 2$
 $\frac{1}{2} \frac{d}{dx} F(2x - 4) = F'(2x - 4)$

แทนใน (*) จะได้ $\int f(x) dx = \int \frac{1}{2} \frac{d}{dx} F(2x - 4) dx = \frac{1}{2} F(2x - 4) = \frac{F(2x-4)}{2}$

ดังนั้น $\int_2^3 f(x) dx = \frac{F(2(3)-4)}{2} - \frac{F(2(2)-4)}{2} = \frac{F(2)}{2} - \frac{F(0)}{2} = \frac{20}{2} - \frac{10}{2} = 5$

24. กำหนดกราฟของฟังก์ชัน f และ g ดังรูป



พิจารณาข้อความต่อไปนี้

- ก. $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + g(x))$ หาค่าได้
 ข. ฟังก์ชัน $f + g$ มีความต่อเนื่องบนช่วง $[-2, 5]$
 ค. $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) g(x))$ หาค่าได้

จากข้อความ ก. ข. และ ค. ข้างต้น ข้อความใดต่อไปนี้กล่าวถูกต้อง

- ข้อความ ก. ถูกต้องเพียงข้อเดียว
- ข้อความ ค. ถูกต้องเพียงข้อเดียว
- ข้อความ ก. และ ข. ถูกต้องเพียงสองข้อ
- ข้อความ ก. และ ค. ถูกต้องเพียงสองข้อ
- ข้อความ ข. และ ค. ถูกต้องเพียงสองข้อ

ตอบ 1

ก. จากกราฟ จะได้ $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$ และ $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = 4$ ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 1^-} (f(x) + g(x)) = 1 + 4 = 5$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3 \text{ และ } \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 2 \text{ ดังนั้น } \lim_{x \rightarrow 1^+} (f(x) + g(x)) = 3 + 2 = 5$$

ทางซ้าย 1 กับทางขวา 1 มีค่าเท่ากัน ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + g(x))$ หาค่าได้ \rightarrow ก. ถูก

ข. จากกราฟ จะได้ $(f + g)(1) = f(1) + g(1) = 1 + 2 = 3$

$$\text{แต่ } \lim_{x \rightarrow 1} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + g(x)) = 5 \text{ (จาก ก.)}$$

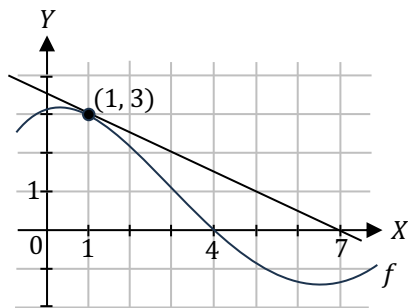
เนื่องจาก $(f + g)(1) \neq \lim_{x \rightarrow 1} (f + g)(x)$ ดังนั้น $f + g$ ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 1 \rightarrow$ ข. ผิด

ค. จากกราฟ จะได้ $\lim_{x \rightarrow 1^-} (f(x) g(x)) = (1)(4) = 4$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (f(x) g(x)) = (3)(2) = 6$$

ทางซ้าย 1 กับทางขวา 1 มีค่าไม่เท่ากัน ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) g(x))$ หาค่าไม่ได้ \rightarrow ค. ผิด

25. ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีกราฟและเส้นสัมผัสที่ $x = 1$ ดังรูป



ค่าของ $f'(1)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 3
- 2
- $-\frac{1}{2}$
- $\frac{1}{2}$
- 3

ตอบ 3

$f'(1)$ จะเท่ากับความชันของเส้นสัมผัสโค้งที่ $x = 1$ ซึ่งจากกราฟ จะเห็นว่าเส้นสัมผัสนี้ ผ่านจุด $(1, 3)$ และ $(7, 0)$

จากสูตรความชันเส้นตรง $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ จะได้ความชันเส้นสัมผัส $= \frac{0 - 3}{7 - 1} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$

26. กำหนดให้รูปสามเหลี่ยม ABC สอดคล้องกับสมการ $\frac{\sin A}{4} = \frac{\sin B}{5} = \frac{\sin C}{6}$ จงหาค่าของ $\cos A$

ตอบ 0.75

จากกฎของ \sin จะได้ $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

$$\text{คูณด้วยสมการที่โจทย์กำหนด จะได้ } \frac{a}{\sin A} \cdot \frac{\sin A}{4} = \frac{b}{\sin B} \cdot \frac{\sin B}{5} = \frac{c}{\sin C} \cdot \frac{\sin C}{6}$$

$$\frac{a}{4} = \frac{b}{5} = \frac{c}{6} = k$$

$$\text{จะได้ } a = 4k, \quad b = 5k \quad \text{และ} \quad c = 6k$$

จากกฎของ \cos จะได้ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$$(4k)^2 = (5k)^2 + (6k)^2 - 2(5k)(6k) \cos A \quad \left. \right\} \div k^2 \text{ ตลอด}$$

$$16 = 25 + 36 - 60 \cos A$$

$$60 \cos A = 45$$

$$\cos A = \frac{45}{60} = 0.75$$

27. ถ้า $z_1 = 3 - 2i$ และ $z_2 = 1 + 5i$ แล้ว $|z_1^2 + 2z_1z_2 + z_2^2|$ มีค่าเท่าใด

ตอบ 25

$$\begin{aligned} |z_1^2 + 2z_1z_2 + z_2^2| &= |(z_1 + z_2)^2| \\ &= |z_1 + z_2|^2 \\ &= |3 - 2i + 1 + 5i|^2 \\ &= |4 + 3i|^2 \\ &= \sqrt{4^2 + 3^2}^2 = 25 \end{aligned}$$

28. ให้ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ เป็นลำดับเลขคณิตที่มี $a_6 = -17$ และ $a_{17} = -50$

ถ้า s และ t เป็นจำนวนเต็มบวกที่ทำให้ $3^{a_1} + 3^{a_2} + 3^{a_3} + \dots + 3^{a_n} + \dots = \frac{s}{t}$

โดยที่ $\frac{s}{t}$ เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ แล้ว $s + t$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ 29

จากสูตรลำดับเลขคณิต $a_n = a_1 + (n - 1)d$

$$\begin{array}{l} \text{แทน } n = 6: \quad a_6 = a_1 + (6 - 1)d \\ \quad \quad \quad -17 = a_1 + 5d \quad \dots(1) \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \text{แทน } n = 17: \quad a_{17} = a_1 + (17 - 1)d \\ \quad \quad \quad -50 = a_1 + 16d \quad \dots(2) \end{array} \right\}$$

$$(2) - (1): \quad -50 - (-17) = 16d - 5d$$

$$-33 = 11d$$

$$-3 = d \quad \rightarrow \text{แทนใน (1): } -17 = a_1 + 5(-3)$$

$$-2 = a_1$$

จะได้ลำดับเลขคณิตคือ $-2, -5, -8, \dots$

จะเห็นว่า $3^{a_1} + 3^{a_2} + 3^{a_3} + \dots = 3^{-2} + 3^{-5} + 3^{-8} + \dots$ เป็นอนุกรมอนันต์ที่มี $a_1 = 3^{-2}$ และ $r = 3^{-3}$

$$\text{จากสูตรอนุกรมอนันต์ จะได้ผลบวก} = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{3^{-2}}{1 - 3^{-3}} = \frac{\frac{1}{9}}{1 - \frac{1}{27}} = \frac{1}{9} \cdot \frac{27}{26} = \frac{3}{26} \rightarrow \text{ดังนั้น } s + t = 3 + 26 = 29$$

29. กำหนดให้ A, B, C เป็นเซต

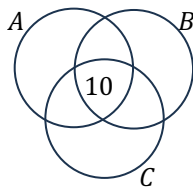
โดยที่ $n(A) = 40$, $n(A \cap B) = 27$, $n(A \cap C) = 21$ และ $n(A \cap B \cap C) = 10$

จงหาจำนวนสมาชิกของเซต $A - (B \cup C)$

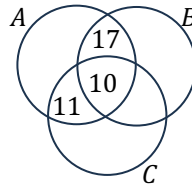
ตอบ 2

เติมตัวเลขในแผนภาพ ตามลำดับดังนี้

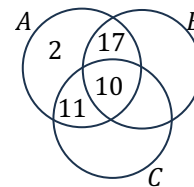
จาก $n(A \cap B \cap C) = 10$



จาก $n(A \cap B) = 27$
 $n(A \cap C) = 21$



จาก $n(A) = 40$



จะได้ $A - (B \cup C)$ มี 2 ตัว

30. นิกกี้แบ่งเวลาอ่านหนังสือเตรียมสอบ 4 วิชา (คณิตศาสตร์ เคมี ฟิสิกส์ ชีววิทยา) ใน 3 วัน (จันทร์ อังคาร พุธ)

โดยแต่ละวิชาจะอ่านเป็นเวลาเพียงครั้งวันในช่วงเช้าหรือช่วงบ่ายของวันใดวันหนึ่งเพียงวันเดียว โดยมีเงื่อนไขดังนี้

- ทุกวันอ่านหนังสืออย่างน้อยหนึ่งวิชา
- วิชาเคมีอ่านก่อนวันพุธ

จงหาจำนวนวิธีการจัดตารางการอ่านหนังสือของนิกกี้

ตอบ 192

จะนับจำนวนแบบที่ “อ่านเคมีวันไหนก็ได้” ก่อน

อ่าน 4 วิชา ใน 3 วัน อย่างน้อยวันละ 1 วิชา \rightarrow จะมี 1 วันที่อ่าน 2 วิชา และอีก 2 วันอ่านวันละ 1 วิชา

เลือกวันที่อ่าน 2 วิชา มีวันให้เลือกได้ 3 แบบ

เลือกจาก 4 วิชา สำหรับอ่านช่วงเช้าของวันนั้น ได้ 4 แบบ

เลือกจาก 3 วิชาที่เหลือ สำหรับอ่านช่วงบ่ายของวันนั้น ได้ 3 แบบ

วันที่เหลือ (อ่าน 1 วิชา) วันแรก เลือกจาก 2 วิชาที่เหลือ ได้ 2 แบบ

เลือกว่าจะอ่านวิชานั้นในช่วงเช้า หรือช่วงบ่าย ได้ 2 แบบ

วันที่เหลือ (อ่าน 1 วิชา) อีกวัน เลือกอ่าน 1 วิชาที่เหลือในช่วงเช้า หรือช่วงบ่าย ได้ 2 แบบ

จะได้จำนวนแบบที่ “อ่านเคมีวันไหนก็ได้” $= 3 \times 4 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 = 288$ แบบ

ใน 288 แบบนี้ จะมีทั้งกลุ่มที่อ่านเคมีวันจันทร์ กลุ่มที่อ่านเคมีวันอังคาร และกลุ่มที่อ่านเคมีวันพุธ

เนื่องจากแต่ละวัน ไม่มีเงื่อนไขอะไรที่แตกต่างกัน ดังนั้น ทั้งสามกลุ่มนี้จะมีจำนวนแบบเท่ากัน $= \frac{288}{3} = 96$ แบบ

ดังนั้น จำนวนแบบที่อ่านเคมีก่อนวันพุธ = จำนวนแบบที่อ่านเคมีวันจันทร์ + จำนวนแบบที่อ่านเคมีวันอังคาร

$$= 96 + 96 = 192 \text{ แบบ}$$

เครดิต

ขอบคุณ คุณ Chonlakorn Chiewpanich ที่ช่วยตรวจสอบความถูกต้องของเอกสาร